

A කොටස

1. ගණිත අභ්‍යන්තර ඉලෙක්ටික භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^n r(3r+1) = n(n+1)^2$ බව සාධනය කරන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $x^2 - 1 \geq |x+1|$ අසමානතාව සපුරාලන x නි සියලු ම කාන්ත්වීක අයන් සෞයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ආගන්ධි සටහනක, $\text{Arg}(z - 2i) = \frac{\pi}{3}$ යන්න සපුරාලන ය සංකීරණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂණවල පරිය වන මි දළ සටහනක් අදින්න.

P හා Q යනු ඉහත ආගන්ධි සටහනකෙහි පිළිවෙළින් $2i$ හා $\sqrt{3} + 5i$ සංකීරණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂණය ගැනී ගනිමු. PQ දුර සොයා Q ලක්ෂණය මත පිහිටුවන බව පෙන්වන්න.

4. INFINITY යන වචනයෙහි අකුරු අට; වෙනස් ආකාර කියකට ජේලියක පිළියෙල කළ හැකි ද?
- මෙම පිළියෙල කිරීමෙහින් කොපමණක

- (i) I අකුරු තුන ම එක ලෝ තිබේ ද?
- (ii) හරියටම එක I අකුරු හා N අකුරු දෙක ම මුළු අකුරු තුන ලෙස තිබේ ද?

40461

5. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^3 - \alpha^3}{\tan x - \tan \alpha} = 3\alpha^2 \cos^2 \alpha$ බව පෙන්වන්න.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

6. $0 < a < b$ යැයි ගනිමු. $\frac{d}{dx} \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{b-a}{b}} \cos x \right) = - \frac{\sqrt{b-a} \sin x}{\sqrt{a \cos^2 x + b \sin^2 x}}$ බව පෙන්වන්න.

ඒහුම් පෑමීමේදී, $\int \frac{\sin x}{\sqrt{a \cos^2 x + b \sin^2 x}} dx$ සෞයන්න.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

7. C වතුයක්, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $x = 3 \cos \theta - \cos^3 \theta$, $y = 3 \sin \theta - \sin^3 \theta$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලැබේ.
 $\frac{dy}{dx} = -\cot^3 \theta$ බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ය රේඛාවේ අනුතුමණය -1 වන පරිදි C වතුය මත වූ P ලක්ෂයෙහි බේඩාංක සොයන්න.

8. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $3x - 4y = 2$ හා $4x - 3y = 1$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනීම්.

- (i) l_1 හා l_2 අතර කෝණවල සම්වේදකයන්හි සම්කරණ ලියා දක්වන්න.
- (ii) l_1 හා l_2 අතර පූර් කෝණයේ සම්වේදකයෙහි සම්කරණය සොයන්න.

9. S යනු $x^2 + y^2 - 4 = 0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තය යැයි දී යනු $y = x + 1$ මගින් දෙනු ලබන පරිලෝජිත රේඛාව යැයි දී ගනිමු. S හා l හි තේරුන ලක්ෂා හරහා යන්නා වූ දී න් වෘත්තය ප්‍රාග්ධනව තේරුනය කරන්නා වූ දී වෘත්තයෙහි සම්කරණය සෞයන්න.
-

10. $-\pi < \theta \leq \pi$ පදනු $\left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 = 1 + \sin \theta$ බව පෙන්වන්න. රේ තයින්, $\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ බව පෙන්වා $\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}$ හි අගය දී සෞයන්න. $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ බව අපෝහනය කරන්න.
-

13. (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$ හා $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$AB^T = P$ බව දී ඇත; මෙහි B^T මගින් B න්‍යාසයෙහි පෙරළම දැක්වේ. $a = 1$ හා $b = -1$ බව පෙන්වා, a හා b සඳහා මෙම අගයන් සහිත B^TA සොයන්න.

P^{-1} ලියා දක්වා, එය භාවිතයෙන්, $PQ = P^2 + 2I$ වන පරිදි Q න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි I යනු ගණය 2 වූ එකක න්‍යාසයයි.

(b) ආගන්ධි සටහනක, $|z| = 1$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා තිරුපණය කරන ලක්ෂණයන්හි පථය වූ C හි දළ සටහනක් අදින්න.

$z_0 = a(\cos \theta + i \sin \theta)$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වේ. $\frac{1}{z_0}$ හා z_0^2 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා එක එකක මාපාංකය a ඇසුරෙන් ද ප්‍රධාන විස්තාරය θ ඇසුරෙන් ද සොයන්න.

P, Q, R හා S යනු පිළිවෙළින් $z_0, \frac{1}{z_0}, z_0 + \frac{1}{z_0}$ හා z_0^2 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ඉහත ආගන්ධි සටහනෙහි තිරුපණය කරන ලක්ෂණය යැයි ගනිමු.

P ලක්ෂණය ඉහත C මත පිහිටන විට

- (i) Q හා S ලක්ෂණ ද C මත පිහිටන බවත්
- (ii) R ලක්ෂණය තාක්ත්වික අක්ෂය මත 0 හා 2 අතර පිහිටන බවත් පෙන්වන්න.

14. (a) $x \neq 1, 2$ සඳහා $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq 1, 2$ සඳහා $f(x)$ හි වුන්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \frac{x(4-3x)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

සපරුයෙන්මුඩ හා හැරුම් ලක්ෂණ දක්වම්න් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අදින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $\frac{x^2}{(x-1)(x-2)} \leq 0$ අසමානකාව විසඳුන්න.

(b) යාබද රුපයේ පෙන්වා ඇති අදුරු කළ පෙදෙසෙහි

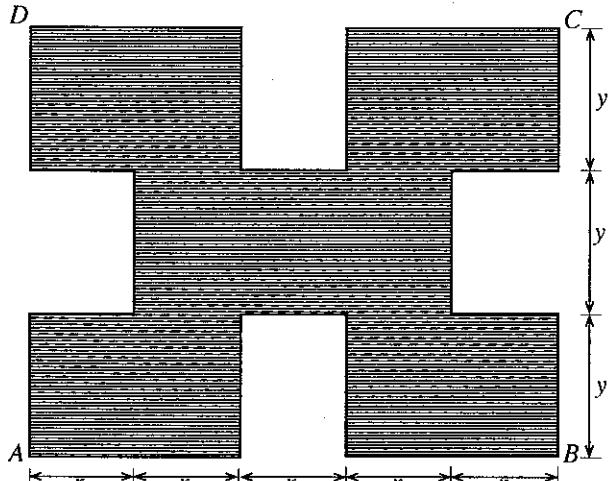
විරෝධීලය 385 m^2 වේ. මෙම පෙදෙස ලබාගෙන ඇත්තේ දිග මීටර $5x$ ද පළල මීටර $3y$ ද වූ $ABCD$ සුජ්‍යකේණුප්‍රයකින්, දිග මීටර y ද පළල මීටර x ද වූ සර්වසම සුජ්‍යකේණුප්‍ර භතරක් ඉවත් කිරීමෙනි.

$y = \frac{35}{x}$ බව පෙන්වා, අදුරු කළ පෙදෙසෙහි

මීටරවලින් මතින ලද පරිමිතිය P යන්න $x > 0$

සඳහා $P = 14x + \frac{350}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

P අවම වන පරිදි x හි ආගය සොයන්න.



15. (a) (i) $\frac{1}{x(x+1)^2}$ හින්න හාග ආසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, ඒ නඩින, $\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$ සොයන්න.
- (ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය හාවිතයෙන්, $\int xe^{-x} dx$ සොයා, ඒ නඩින, $y = xe^{-x}$ වකුයෙන් දී $x = 1$, $x = 2$ හා $y = 0$ සරල රේබාවලින් දී ආවශ්‍ය පෙදෙසෙහි වර්ගජලය සොයන්න.

$$(b) c > 0 හා I = \int_0^c \frac{\ln(c+x)}{c^2+x^2} dx \text{ යැයි ගනිමු. } x = c \tan \theta \text{ ආදේශය හාවිතයෙන්, }$$

$$I = \frac{\pi}{4c} \ln c + \frac{1}{c} J \text{ බව පෙන්වන්න; } \text{ මෙහි } J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan \theta) d\theta \text{ වේ.}$$

a තියනයක් වන $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ ඇතුළු හාවිතයෙන්, $J = \frac{\pi}{8} \ln 2$ බව පෙන්වන්න.

$$I = \frac{\pi}{8c} \ln(2c^2) \text{ බව අපෝහනය කරන්න.}$$

16. $m \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $P \equiv (0,1)$ ලක්ෂ්‍යය $y = mx$ මගින් දෙනු ලබන I සරල රේබාව මත නොපිහිටන බව පෙන්වන්න.

I බ ලම්බව P හරහා වූ සරල රේබාව මත මිනෑම ලක්ෂ්‍යක බණ්ඩාංක $(-mt, t+1)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

එ නඩින, P සිට I බ ඇදි ලම්බයේ අඩිය වූ Q ලක්ෂ්‍යයෙහි බණ්ඩාංක $\left(\frac{m}{1+m^2}, \frac{m^2}{1+m^2}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

m විවෘතය වන විට, Q ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 - y = 0$ මගින් දෙනු ලබන S ව්‍යුත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වා, Q හි පරායේ දළ සටහනක් xy -තළයෙහි අදින්න.

තව දී $R \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ලක්ෂ්‍යය S මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

R ලක්ෂ්‍යයේ දී S බාහිරව ස්ථාපිත කරන හා x -අක්ෂය මත කේත්ද්‍ය පිහිටන S' ව්‍යුත්තයේ සම්කරණය සොයන්න.

S' හි කේත්ද්‍යම කේත්ද්‍ය ලෙස ආශිව S අභ්‍යන්තරව ස්ථාපිත කරන ව්‍යුත්තයේ සම්කරණය ලියා දක්වන්න.

17. (a) (i) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ සඳහා $\frac{2 \cos(60^\circ - \theta) - \cos \theta}{\sin \theta} = \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) රුපයේ පෙන්වා ඇති $ABCD$ ව්‍යුරුපයෙහි $AB = AD$, $A\hat{B}C = 80^\circ$, $C\hat{A}D = 20^\circ$ හා $B\hat{A}C = 60^\circ$ වේ.

$A\hat{C}D = \alpha$ යැයි ගනිමු. ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය හාවිතයෙන්, $\frac{AC}{AB} = 2 \cos 40^\circ$ බව පෙන්වන්න.

මිළුගට ADC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය හාවිතයෙන්,

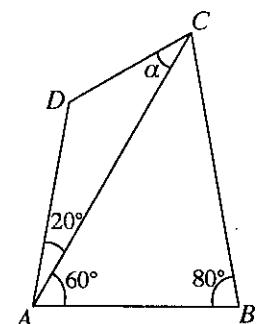
$$\frac{AC}{AD} = \frac{\sin(20^\circ + \alpha)}{\sin \alpha} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

$\sin(20^\circ + \alpha) = 2 \cos 40^\circ \sin \alpha$ බව අපෝහනය කරන්න.

$$\text{එ නඩින, } \cot \alpha = \frac{2 \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

දැන්, ඉහත (i) හි ප්‍රතිඵලය හාවිතයෙන්, $\alpha = 30^\circ$ බව පෙන්වන්න.

- (b) $\cos 4x + \sin 4x = \cos 2x + \sin 2x$ සම්කරණය විසඳන්න.



A කොටස

1. ස්කන්දය m වූ P අංශවක් හා ස්කන්ධය λm වූ Q අංශවක් පිළිවෙළින් μ හා ν වේගවලින් එකිනෙක දෙසට, සුමෙට තිරස් ගෙවීමක් මත වූ එක ම සරල රෝබාවක් දිගේ වලනය වේ. ජ්‍යායේ ගැටුමෙන් පසු, P අංශව ν වේගයෙන් හා Q අංශව μ වේගයෙන් ප්‍රතිවිරැදුම දිගාවලට වලනය වේ. $\lambda = 1$ බව පෙන්වා, P හා Q අතර ප්‍රත්‍යාගත් සංග්‍රහකය සොයාන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. කුඩා ඒකාකාර බෝලයක් යෙත් බැලුනයක් කාලය $t=0$ දී පොලොට මත උක්ෂායකින් නිශ්චලනාවයෙන් ආරම්භ කර ඒකාකාර f ත්වරණයකින් සිරස් ව ඉහළට වලනය වේ; මෙහි $f < g$ වේ. කාලය $t=T$ නි දී බෝලය, බැලුනයෙන් සිරුවෙන් ඉවත් වී ගුරුත්වය යටතේ වලනය වේ. $t=0$ සිට බෝලය එහි උපරිම උස කරා ලැයා වන තෙක් බෝලයේ උප්‍රි අන් වලිනය සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අදින්න. T , f හා g ඇසුරෙන්, බෝලය ලැයා වූ උපරිම උස සොයාන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

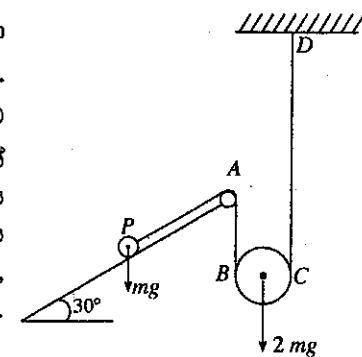
.....

.....

.....

.....

3. රුපයේ $PABCD$ යනු තිරසට 30° කින් ආනන අවල සුම්මත තුළයක් මත තබා ඇති ස්කන්ධය m වූ අංශුවකට ඇදා ඇති සැහැල්ලු අවිතනා තන්තුවකි. තන්තුව, A හි වූ අවල කුඩා සුම්මත ක්ෂේපියක් මතින් ද ස්කන්ධය $2m$ වූ සුම්මත ක්ෂේපියක් යටින් ද යයි. D ලක්ෂාය අවල වේ. PA , උපරිම බෙතුම් රේඛාවක් දිගේ වන අතර AB හා CD සිරස් වේ. තන්තුව තද්ව ඇතිව පදනම් තිශ්වලනාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. අංශුවේ ත්වරණයෙහි විශාලත්වය සවල ක්ෂේපියේ ත්වරණයෙහි විශාලත්වය මෙන් දෙගුණයක් බව පෙන්වා, තන්තුවේ ආතනිය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සම්කරණ ලියා දක්වන්න.

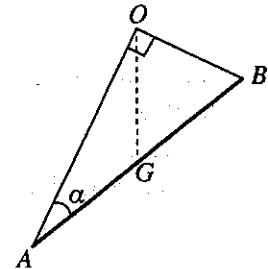


4. ස්කන්ධය $M \text{ kg}$ වූ ව්‍යුත් රථයක් ස්කන්ධය $m \text{ kg}$ වූ කාරයක් සඟු තිරස් පාරක් දිගේ ඇදගෙන යනු ලබන්නේ ව්‍යුත් රථයේ හා කාරයේ වලින දියාවට සමාන්තර වූ සැහැල්ලු අවිතනා කේබලයක් ආධාරයෙනි. ව්‍යුත් රථයේ හා කාරයේ වලිනයට ප්‍රතිරෝධ පිළිවෙළින් නිවිතන λM හා λm වේ; මෙහි $\lambda (>0)$ නියතයකි. එක්තරා මොහොතක දී ව්‍යුත් රථයේ එන්ජිමෙන් ජනනය කරනු ලබන ජවය $P \text{ kW}$ වන අතර ව්‍යුත් රථයෙහි හා කාරයෙහි වේගය $v \text{ ms}^{-1}$ වේ. එම මොහොතේ දී කේබලයේ ආතනිය නිවිතන $\frac{1000mP}{(M+m)v}$ බව පෙන්වන්න.

5. සුපුරුදු අකතයෙන්, $-i + 2j$ හා $2ai + aj$ යනු පිළිවෙළින් O අවල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂා දෙකක පිහිටුම් දෙසින යැයි ගනීම්; මෙහි $a(>0)$ නියතයකි. අදිග ඉණිතය භාවිතයෙන්, $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

C යනු $OACB$ සැපුකෝෂණාජයක් වන පරිදි වූ ලක්ෂාය යැයි ගනීම්. \overrightarrow{OC} දෙසිනය y -අක්ෂය දිගේ පිහිටයි නම්, a හි අගය සොයන්න.

6. OA හා OB සැහැල්ලු අවිනාශ තන්තු දෙකක මෙන් O අවල ලක්ෂායකින් එල්ලන ලද දිග $2a$ හා බර W වූ AB උකාකාර දැන්වන් රුපයේ දැක්වෙන පරිදි සමතුලිතකාවයේ පවතී. G යනු AB හි මධ්‍ය දැක්වය වේ. $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ හා $\angle OAB = \alpha$ බව දී ඇත. $\angle AOG = \alpha$ බව පෙන්වා, තන්තු දෙකෙහි ආත්ති සොයන්න.



7. A හා B යනු ගිහිදී අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සූපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, $P(A' \cup B') = \frac{5}{6}$ හා $P(B | A) = \frac{1}{4}$ බව ඇ ඇත. $P(A)$ හා $P(B)$ සෞයන්ත.

8. මල්ලක, කාඩ් නවයක් අවළු වේ. ඒවායින් හතරක 1 සංඛ්‍යාංකය මුදුණු කර ඇති අතර ඉතිරි ඒවායේ 2 සංඛ්‍යාංකය මුදුණු කර ඇත. ප්‍රතිස්ථාපන රහිත ව වර්කට එක බැහින් සසම්භාවිත මල්ලන් කාඩ් ඉවතට ගනු ලැබේ.

- (i) ඉවතට ගත් පළමු කාඩ් දෙකකි සංඛ්‍යාංකයන්හි එකතුව හතර විමේ,
(ii) ඉවතට ගත් පළමු කාඩ් තුනෙහි සංඛ්‍යාංකයන්හි එකතුව තුන විමේ,

සම්භාවිතාව සෞයන්ත.

9. නිරික්ෂණ හයක අගයන් a, a, b, b, x හා y වේ; මෙහි a, b, x හා y යනු ප්‍රසින්න දෙන නිවේල වන අතර $a < b$ වේ. මෙම නිරික්ෂණ හයයින් මාත්‍යන් මොනවා දී?

මෙම මාත්‍යන්හි එළකුතය හා ගුණිතය පිළිවෙශීන් x හා y බව දී ඇත. නිරික්ෂණ හයයින් මධ්‍යන්යය $\frac{7}{2}$ වේ නම්, a හා b සෞයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. x_1, x_2, \dots, x_{10} යන් සංඛ්‍යා දැහැයි මධ්‍යන්ය හා විචලනාව පිළිවෙශීන් 10 හා 9 වේ. x_{10} සංඛ්‍යාව ඉවත් කිරීමෙන් පසු ඉතිරි වන සංඛ්‍යා නවයෙහි ද මධ්‍යන්ය 10 බව දී ඇත. මෙම සංඛ්‍යා නවයෙහි විචලනාව සෞයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....